Nicht f. d. Austausch

UNTERSUCHUNGEN ÜBER EIN PROBLEM AUS DER THEORIE DER KONFIGURATIONEN

INAUGURALDISSERTATION
ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
GENEHMIGT VON DER
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT
DER FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT
ZU BERLIN

VON

EBERHARD MELCHIOR
AUS DRESDEN

TAG DER MÜNDLICHEN PRÜFUNG: 9. DEZEMBER 1936
TAG DER PROMOTION: 26. APRIL 1937

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

N ?

REFERENTEN:
PROFESSOR DR. L. BIEBERBACH
PROFESSOR DR. E. SCHMIDT

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderabdruck aus den „Schriften des Mathematischen Seminars und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin" / Band 3

Erstes Kapitel.

Die Einführung einer Multiplikation zweier symmetrischer Geradenkomplexe.

§ 1. Problemstellung.

In einer von W. JUNG und mir veröffentlichten Arbeit[1]) wurde folgendes Problem aufgestellt:

Sind die s Schnittpunkte von n Geraden der projektiven Ebene so verteilt, daß auf jeder Geraden genau k Schnittpunkte liegen, so werde das System der n Geraden und s Schnittpunkte als ein symmetrischer Geradenkomplex (n, k) bezeichnet.

Aufgabe: *Es sind alle symmetrischen Geradenkomplexe, soweit sie sich in der Ebene realisieren lassen, aufzufinden.*

Zu einer anderen Formulierung kommt man durch folgende Bemerkung: Liegt irgendein symmetrischer Geradenkomplex in einer Ebene gezeichnet vor, so wähle man in dieser Ebene irgendeinen nichtsingulären Kegelschnitt und konstruiere zu jeder Geraden des Komplexes den Pol, zu jedem Schnittpunkt die Polare in bezug auf den Kegelschnitt. Wir erhalten so an Stelle der n Geraden n Punkte der Ebene. Da ferner jeder auftretende Schnittpunkt zum Komplex gehört, so gehört im dualen Fall jede Verbindungslinie der n Punkte dazu. Ferner gehen durch jeden Punkt k solcher Verbindungsgeraden. Man kann also die Aufgabe auch so formulieren:

Es sollen alle Punktsysteme von n Punkten einer Ebene gefunden werden mit folgender Eigenschaft: Verbindet man jeden der n Punkte mit jedem, so sollen durch jeden Punkt genau k Verbindungsgeraden hindurchgehen.

In der oben angeführten Arbeit wurde dann der Begriff der Addition zweier symmetrischer Geradenkomplexe eingeführt. Die Addition war dann und nur dann erklärt, wenn die beiden Komplexe, die addiert werden sollen, derselben Klasse angehörten. Sie erzeugten wieder ein Element der Klasse.

---

1) W. Jung und E. Melchior, *Symmetrische Geradenkomplexe*. Deutsche Mathematik 1 (1936), S. 239—254. Hinsichtlich der im folgenden verwendeten Begriffe muß auf diese Arbeit verwiesen werden, die mit J.-M. zitiert wird.

Es soll nun hier eine neue Art der Verknüpfung zweier Komplexe aufgezeigt werden, die nachher passend als Multiplikation bezeichnet werden wird. Während aber die Addition in der Ebene ausgeführt werden konnte, ist die neu einzuführende Multiplikation nur im dreidimensionalen, projektiven Ebenenraum durchführbar. Es müssen deshalb erst einige diesbezügliche Vorbemerkungen gemacht werden.

§ 2. Voruntersuchungen.

Sind im dreidimensionalen Raum n Ebenen so gegeben, daß jede Ebene mit k Schnittgeraden inzident ist, so liege ein symmetrischer Ebenenkomplex $[n, k]$ vor. Ganz analog definiere man hier wieder Zerlegung und Charakteristik einer Ebene.

Eine Schnittgerade habe die Wertigkeit r, wenn $r + 1$ Ebenen durch sie hindurchgehen. Es ist dann auch hier wieder die Summe der Wertigkeiten aller Geraden einer Ebene gleich $n - 1$.

Zwei Ebenenkomplexe sollen ferner gleich sein, wenn sich ihre Ebenen eineindeutig so aufeinander beziehen lassen, daß entsprechende Ebenen gleiche Zerlegung haben.

Gibt es zu einem Ebenenkomplex $[n, k]$ einen Geradenkomplex (n, k) so, daß sich die Ebenen von $[n, k]$ eineindeutig den Geraden von (n, k) zuordnen lassen und daß die Zerlegungen einer Ebene von $[n, k]$ und der dieser Ebene entsprechenden Geraden von (n, k) übereinstimmen, so heiße (n, k) der dem Ebenenkomplex $[n, k]$ entsprechende Geradenkomplex. Der Komplex $[n, k]$ entsteht dann auch aus (n, k), indem wir bei letzterem Gerade durch Ebene und Punkt durch Gerade ersetzen.

Satz 1: *Zu jedem Geradenkomplex (n, k) gibt es den entsprechenden Ebenenkomplex $[n, k]$ und umgekehrt.*

Ist nämlich (n, k) ein in einer Ebene E gezeichneter Geradenkomplex, so bewege man E in der Richtung ihrer Normalen. Aus (n, k) entsteht dann ein Ebenenkomplex $[n, k]$ von n Ebenen. Ordnet man jede Ebene von $[n, k]$ der sie erzeugenden Geraden von (n, k) zu, so haben, wie man sich leicht überlegt, jede Ebene und die ihr zugeordnete Gerade die gleiche Zerlegung.

Umgekehrt schneide man einen Ebenenkomplex $[n, k]$ mit einer Ebene E, welche mit keiner Schnittgeraden und keinem Schnittpunkt von $[n, k]$ inzident ist. Ordnet man jeder Ebene von $[n, k]$ die Schnittgerade dieser Ebene mit der Ebene E zu, so sieht man leicht, daß die Zerlegung einer Ebene mit der der betreffenden Schnittgeraden übereinstimmt.

Es lassen sich also alle Ebenenkomplexe $[n, k]$ eineindeutig allen Geradenkomplexen (n, k) zuordnen.

Satz 2: *Es seien n Geraden vorgelegt, die nicht alle derselben Ebene angehören. Wenn dann bei Berücksichtigung aller Schnittpunkte der Wertigkeit* > 1 *auf* n_1 *Geraden die Charakteristik* $\chi_1, \ldots,$ *auf* n_r *Geraden die Charakteristik* χ_r *vorliegt, so gibt es, falls* $\chi_1, \ldots, \chi_r$ *derselben Klasse angehören, einen symmetrischen Geradenkomplex* (n, k) *der Ebene mit* n_1 *Geraden der Charakteristik* $\chi_1, \ldots, n_r$ *Geraden der Charakteristik* χ_r.

Es gibt nämlich immer einen Punkt S und eine Ebene E, so daß bei Projektion der n Geraden von S nach E keine Schnittpunkte zusammenfallen und außer den vorhandenen Schnittpunkten der n Geraden nur noch einfache Schnittpunkte bei der Projektion entstehen. Das Bild g' einer Geraden g hat dann zunächst die Charakteristik $\chi = (a_1 + 1, \ldots, a_l + 1)$, auf g' liegt also ein a_1-facher, a_2-facher, $\ldots$, a_l-facher Punkt. Sonst liegen auf g' nur noch p einfache Punkte. Es ist aber

$$n - 1 = a_1 + \cdots + a_l + p \quad \text{und} \quad \sum_{\varrho=1}^{l}(a_\varrho - 1) = c.$$

Die Summe $\sum_{\varrho=1}^{l}(a_\varrho - 1)$ hat nach Voraussetzung für alle Geraden denselben Wert. Ferner ist

$$k = l + p \text{ und } n - k - 1 = n - l - p - 1 = \sum_{\varrho=1}^{l}(a_\varrho - 1) = c, \text{ d.h. } k = n - c - 1,$$

also hat k für jede Gerade denselben Wert, der Komplex (n, k) ist also symmetrisch.

Dieser Satz läßt sich auch dahin verallgemeinern, daß n Geraden in einem n-dimensionalen Raum durch Projektion in eine Ebene einen symmetrischen Geradenkomplex liefern, falls die Charakteristiken der n Geraden derselben Klasse angehören. Wir werden später Geradenkomplexe kennenlernen, welche sich besonders einfach im n-dimensionalen Raum aufbauen lassen, während ihre Projektion in eine Ebene sehr kompliziert sein kann.

§ 3. Die Multiplikation.

Es seien nun K_1 und K_2 zwei beliebige symmetrische Geradenkomplexe: K_1 habe N_1 Geraden und die Charakteristiken $\chi_1', \chi_2', \ldots, \chi_r'$, wobei n_ϱ' Geraden die Charakteristik χ_ϱ' haben sollen $(\varrho = 1, \ldots, r)$. Ferner bestehe K_2 aus N_2 Geraden und den Charakteristiken $\bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2, \ldots, \bar{\chi}_s$, wo $\bar{n}_\sigma$ Geraden die Charakteristik $\bar{\chi}_\sigma$ haben sollen $(\sigma = 1, \ldots, s)$. Es ist dann

$$N_1 = \sum_{\varrho=1}^{r} n_\varrho', \qquad N_2 = \sum_{\sigma=1}^{s} \bar{n}_\sigma.$$

Die beiden Komplexe K_1 und K_2, die in einer Ebene F_1 bzw. F_2 gezeichnet sein mögen, denke man sich so transformiert, daß alle Schnittpunkte im Endlichen liegen. Man bewege nun die Ebene F_1 bzw. F_2 in Richtung ihrer Normalen. Man erhält so aus K_1 bzw. K_2 zwei Ebenenkomplexe E_1 bzw. E_2. Alle Schnittgeraden von E_1 bzw. E_2 gehen dann durch einen uneigentlichen Punkt U_1 bzw. U_2 und liegen im Inneren eines Kreiszylinders Z_1 bzw. Z_2. Die verlängerten Ebenen von E_1 bzw. E_2 durchsetzen dabei Z_1 bzw. Z_2 in Mantellinien.

Nun lege man die beiden Zylinder samt den sie durchsetzenden Ebenen so im dreidimensionalen Raume hin, daß Z_1 und Z_2 keinen eigentlichen oder uneigentlichen Punkt gemein haben, was ja stets möglich ist. Geht dabei noch eine Ebene von E_2 durch den uneigentlichen Punkt U_1 von Z_1, so läßt sich dies durch Drehen des Zylinders Z_2 um seine Achse verhindern, analog bei E_1. Damit ist also folgendes erreicht worden:

Keine Ebene von E_1 ist inzident mit einer Schnittgeraden oder dem (einzigen) Schnittpunkt von E_2 und umgekehrt. Ferner besitzen E_1 und E_2 keine gemeinsame Ebene und auch nicht zwei parallele Ebenen.

Denn wäre letzteres der Fall, so hätten zwei Ebenen e_1 von E_1 und e_2 von E_2 ihre uneigentliche Gerade gemeinsam, also ginge e_2 durch U_1, was ausgeschlossen war. Wäre ferner e_2 inzident mit einer Schnittgeraden zweier Ebenen von E_1 oder umgekehrt, so ginge e_2 ebenfalls durch U_1.

Es kann ferner auch keine Schnittgerade von E_1 sich mit einer solchen von E_2 schneiden, da die beiden Zylinder keinen Punkt gemein haben.

Nun betrachte man das System aller Schnittgeraden, in denen sich eine Ebene von E_1 mit einer Ebene von E_2 schneidet. Durch jede solche Gerade geht genau eine Ebene e_1 von E_1 und genau eine Ebene e_2 von E_2; denn ginge mehr als eine Ebene etwa von E_2 hindurch, so wäre e_1 mit einer Schnittgeraden von E_2 inzident, was nicht sein kann. Insgesamt gibt es also $N_1 N_2$ solcher Geraden.

Satz 3: *Das System der $N_1 N_2$ Schnittgeraden der Ebenenkomplexe E_1 und E_2 bildet einen symmetrischen Geradenkomplex, wenn man die Geraden in eine Ebene projiziert.*

Beweis: Es sei g eine dieser $N_1 N_2$ Geraden und Schnittgerade von e_1 aus E_1 und e_2 aus E_2. Die Charakteristik der Ebene e_1 sei χ', die von e_2 sei $\bar{\chi}$. Nur solche Charakteristiken kommen ja nach der Vorbemerkung für die Ebene e_1 bzw. e_2 in Frage. Nun durchsetzt

die Ebene e_1 den Ebenenkomplex E_2 in einer Schnittfigur, nämlich in dem Geradenkomplex K_2. Die Geraden dieser Schnittfigur gehören sämtlich dem System der $N_1 N_2$ Geraden an. Eine Gerade dieser Schnittfigur liegt aber auch in der Ebene e_2, sie ist also, da sie in e_1 und e_2 liegt, unsere Gerade g. Die Gerade g hat daher zunächst die Charakteristik $\bar{\chi} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, auf g liegt also je ein $(b_1 - 1)$-facher, ..., $(b_m - 1)$-facher Punkt, womit aber noch nicht alle mehrfachen Punkte von g erschöpft sind.

Die Punkte der Wertigkeit $(b_1 - 1), \ldots, (b_m - 1)$ liegen alle auf einem Stück der Geraden g, welches ganz im Zylinder Z_2 liegt. Nun durchsetzt die Ebene e_2 den Ebenenkomplex E_1 in einer Schnittfigur K_1, deren Geraden wieder unserem System angehören. Eine dieser Geraden liegt in e_1, es ist dies also wieder die Gerade g. Also hat g außerdem die Charakteristik $\chi' = (a_1, \ldots, a_n)$. Die $(a_1 - 1)$-fachen, ..., $(a_n - 1)$-fachen Punkte liegen auf einem Stück der Geraden g, welches im Zylinder Z_1 enthalten ist. Da beide Stücke punktfremd sein müssen, so hat also g die Charakteristik $\chi = (\chi', \bar{\chi})$.

Dies sind aber auch alle mehrfachen Punkte der Geraden g. Denn läge noch ein mehrfacher Schnittpunkt auf g, so müßte dieser in der Ebene e_1 und auch in der Ebene e_2 liegen. In der Ebene e_1 würden sich also mehrere Geraden $g_1, g_2, \ldots, g_t$ unseres Systems in einem Punkte schneiden. Da aber jede solche Gerade die Schnittlinie einer Ebene e_1 von E_1 und einer Ebene e_2 von E_2 ist, so ginge durch die Geraden $g_1, g_2, \ldots, g_t$ noch je eine Ebene von E_2. Der Schnittpunkt entstünde also dadurch, daß wir e_1 mit mehreren Ebenen von E_2 schnitten. Dann aber wäre dieser Punkt schon berücksichtigt worden, wir hatten ja e_1 mit allen Ebenen von E_2 geschnitten und in der entstandenen Schnittfigur alle Punkte, die mit g inzident sind, aufgesucht.

Damit nun das System der $N_1 N_2$ Geraden einen symmetrischen Komplex liefert, ist offenbar notwendig und hinreichend, daß alle in ihm vorkommenden Charakteristiken derselben Klasse angehören. Alle Charakteristiken χ_ν des Systems haben aber nach voriger Überlegung die Form

$$\chi_\nu = (\chi_\varrho', \bar{\chi}_\sigma) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r;\ \sigma = 1, 2, \ldots, s),$$

wo immer je zwei Charakteristiken χ' und $\bar{\chi}$ zu kombinieren sind.

Nun gehört K_1 der Klasse c_1, K_2 der Klasse c_2 an. Hat dann eine Charakteristik $\bar{\chi}_\sigma$ die Form $(b_1, \ldots, b_m)$, eine Charakteristik χ_ϱ' die Form $(a_1, \ldots, a_n)$, so ist

$$c_1 = a_1 + \cdots + a_n - 2n, \quad c_2 = b_1 + \cdots + b_m - 2m.$$

Die Charakteristik χ_ν wird dann

$$\chi_\nu = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m),$$

und es ist

$$c = a_1 + \cdots + a_n + b_1 + \cdots + b_m - 2(n+m) = c_1 + c_2$$

für jede Charakteristik χ_ν des Geradensystems der $N_1 N_2$ Geraden. Jetzt sieht man, daß auf diese Weise tatsächlich ein neuer symmetrischer Geradenkomplex entstanden ist. Die Klasse c, in der er liegt, ist $c = c_1 + c_2$. Diesen neuen Komplex werden wir nun symbolisch mit $K = K_1 \times K_2$ bezeichnen, wobei zum Unterschied der Multiplikation mit einer ganzen rationalen Zahl das Malzeichen $\times$ eingeführt worden ist.

Nun kommen offenbar in K alle Charakteristiken χ vor, die Verbindungen einer Charakteristik von K_1 mit einer von K_2 sind. Es hat nämlich E_1 offenbar n_ϱ' Ebenen der Charakteristik χ_ϱ', ebenso hat E_2 gerade $\bar{n}_\sigma$ Ebenen der Charakteristik $\bar{\chi}_\sigma$. Jede Gerade, die Schnittgerade zweier solcher Ebenen mit den Charakteristiken χ_ϱ' und $\bar{\chi}_\sigma$ ist, erhält dann die Charakteristik

$$\chi_\nu = (\chi_\varrho', \bar{\chi}_\sigma).$$

Also gibt es offenbar $n_\varrho' \bar{n}_\sigma$ Geraden mit der Charakteristik χ_ν. Als Kontrolle beachte man, daß

$$N_1 N_2 = (n_1' + \cdots + n_r')\,(\bar{n}_1 + \cdots + \bar{n}_s)$$

ist. Multipliziert man aus, so erhält man eine Summe von Gliedern der Form $n_\varrho' \bar{n}_\sigma$.

Es möge hier dieses Ergebnis im Zusammenhang mit der früher abgeleiteten Addition noch einmal zusammengestellt werden. Als Verknüpfungsmöglichkeiten zweier symmetrischer Geradenkomplexe sind jetzt bekannt:

1. *Die Addition.* Sie ist erklärt zwischen Elementen derselben Klasse und liefert wieder ein Element der Klasse. Ferner besitzt die Summe dieselben Charakteristiken wie die Summanden. Die Anzahl der Geraden addiert sich, und zwar für jede Charakteristik einzeln, d. h. kommt eine Charakteristik χ in dem einen Summanden a-mal, in dem andern b-mal vor, so kommt sie in der Summe $(a+b)$-mal vor. Die Addition ist assoziativ und kommutativ.

2. *Die Multiplikation.* Sie ist für zwei beliebige symmetrische Geradenkomplexe erklärt. Die Klasse, in der das Produkt liegt, wird erhalten durch Addition der Klassenzahlen beider Faktoren. Die Charakteristiken des Produktes werden durch Kombination je einer Charakteristik aus den beiden Faktoren erhalten. Die Anzahl der

Geraden multipliziert sich, und zwar analog wie bei der Addition für je zwei Charakteristiken; d. h. kommt eine Charakteristik χ_1 im einen Faktor a-mal, die Charakteristik χ_2 im anderen b-mal vor, so kommt die aus χ_1 und χ_2 kombinierte Charakteristik $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ im Produkt auf $a\,b$ Geraden vor. Die Multiplikation ist kommutativ und assoziativ. Addition und Multiplikation zusammen befolgen das distributive Gesetz.

§ 4. Bemerkungen zur Multiplikation.

Daß das kommutative Gesetz der Multiplikation gilt, ist sofort einzusehen.

Die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes läßt sich so beweisen: Seien K_1, K_2 und K_3 drei symmetrische Geradenkomplexe. K_ϱ habe die Charakteristiken

$$\chi_1^{(\varrho)},\ \chi_2^{(\varrho)},\ \ldots,\ \chi_r^{(\varrho)} \qquad (\varrho = 1, 2, 3),$$

und es komme die Charakteristik $\chi_\mu^{(\varrho)}$ im Komplex K_ϱ auf $n_\mu^{(\varrho)}$ Geraden vor mit $n_\mu^{(\varrho)} \geqq 0$. Zunächst stimmen in $K_1 \times (K_2 \times K_3)$ und $(K_1 \times K_2) \times K_3$ die Klasse und die Anzahl der Geraden überein. $K_2 \times K_3$ enthält alle Charakteristiken der Form $(\chi_\sigma'', \chi_\tau''')$, also $K_1 \times (K_2 \times K_3)$ alle Verbindungen der Form $(\chi_\varrho', \chi_\sigma'', \chi_\tau''')$ je $n_\varrho' n_\sigma'' n_\tau'''$-mal. Dasselbe ist aber von $(K_1 \times K_2) \times K_3$ zu behaupten. Also ist

$$(K_1 \times K_2) \times K_3 = K_1 \times (K_2 \times K_3) = K_1 \times K_2 \times K_3.$$

Zum Beweis des distributiven Gesetzes bilde man $K_1 \times (K_2 + K_3)$ und $K_1 \times K_2 + K_1 \times K_3$. Ersterer Komplex verlangt, daß K_2 und K_3 derselben Klasse angehören, also $c_2 = c_3$. Ist das aber der Fall, so liegen auch $K_1 \times K_2$ und $K_1 \times K_3$ in derselben Klasse und umgekehrt. Es liegen also $K_1 \times (K_2 + K_3)$ und $K_1 \times K_2 + K_1 \times K_3$ in der Klasse

$$c = c_1 + c_2 = c_1 + c_3.$$

Diese beiden Komplexe bestehen auch aus gleich viel Geraden, und in beiden kommen nur die Charakteristiken der Form $(\chi_\varrho', \chi_\sigma'')$ und $(\chi_\varrho', \chi_\tau''')$ vor, und zwar auf gleichviel Geraden. Also ist das distributive Gesetz auf Grund unserer Gleichheitsdefinition gültig.

Es braucht wohl kaum darauf hingewiesen zu werden, daß zwischen der Addition und Multiplikation von symmetrischen Geradenkomplexen und der von Vektoren oder komplexen Zahlen große Ähnlichkeit besteht.

Der Zusammenhang zwischen Addition und Multiplikation zweier symmetrischer Komplexe soll nun noch mehr hervorgehoben werden.

Sei K ein Komplex der Klasse c mit n Geraden. Man addiere den Komplex K etwa r-mal zu sich selbst und versuche dann die Summe $K + K + \cdots + K$, die früher auch mit $r\,K$ bezeichnet wurde, als Produkt zweier Komplexe $R \times K$ darzustellen. Da $r\,K$ in der Klasse c von K liegt, so müßte dann R der Klasse o angehören; da ferner $r\,K$ aus $r\,n$ Geraden besteht, müßte R aus r Geraden bestehen. Dann aber käme für R nur der triviale Komplex $(r, r-1)$ in Frage, den es ja auch immer gibt. Alsdann haben die beiden Komplexe $r\,K$ und $R \times K$ in der Tat gleichviel Geraden, gehören derselben Klasse an und haben die gleichen Charakteristiken auf gleichviel Geraden. Daher ist

$$r\,K = R \times K.$$

Der Komplex R übernimmt hier also scheinbar die Rolle einer ganzen rationalen Zahl r.

Nun sind aber nicht nur die beiden Komplexe $r\,K$ und $R \times K$ gleich, sondern es gehen sogar die Konstruktionsmethoden der beiden Komplexe aus dem Komplex K ineinander über. Das sieht man sofort ein, wenn man den Komplex K, der in einer Ebene gezeichnet sei, r-mal im Raum übereinander legt und geeignet wieder so in eine Ebene projiziert, daß keine Schnittpunkte zusammenfallen. Dies ist nämlich die Operation $K + K + \cdots + K$, hier nur im Raume ausgeführt.

Dann bewege man K senkrecht zur Zeichenebene (E_1) und ebenso den Komplex $(r, r-1)$ senkrecht zur Zeichenebene (E_2). Bringt man die beiden so erhaltenen Ebenenkomplexe E_1 und E_2 zum Schnitt, so sieht man, wie von E_2 aus E_1 die r Schnittfiguren K ausgeschnitten werden, die dann wieder in eine Ebene projiziert werden. In diesem Fall gehen also tatsächlich die beiden Verknüpfungsarten ineinander über.

Man sieht ferner noch, daß auch das früher entwickelte Verfahren der Parallelverschiebung in der Multiplikation enthalten ist, es ist dies nämlich die Multiplikation mit dem trivialen Komplex $(n, 1)$.

Aus der Multiplikation ergeben sich nun noch einige andere Verknüpfungsmöglichkeiten zweier Komplexe, die jedoch bis jetzt noch keine nennenswerte Bedeutung erlangt haben. Seien z. B. K_1 und K_2 zwei Komplexe, von denen mindestens einer einen Index $r > 1$ habe. K_1 und K_2 seien der Einfachheit halber als homogen vorausgesetzt, was aber nicht unbedingt notwendig ist. Es möge K_1 aus n_1 Geraden, K_2 aus n_2 Geraden bestehen, und die Charakteristik von K_1 sei $(a_1, \ldots, a_l)$, die von K_2 sei $(b_1, \ldots, b_s)$. Ist der Index von K_1 gleich r_1 und der von K_2 gleich r_2, so kommt r_1, falls $r_1 > 2$, in der Charakteristik

$(a_1, \ldots, a_l)$ vor, analog r_2 in $(b_1, \ldots, b_s)$, falls $r_2 > 2$. Kombiniert man nun K_1 und K_2 auf die obige Weise, so erhält man einen Komplex von $n_1 n_2$ Geraden. Seine Charakteristik ist

$$(a_1, \ldots, a_{\nu-1}, a_{\nu+1}, \ldots, a_l, b_1, \ldots, b_{\mu-1}, b_{\mu+1}, \ldots, b_s, r_1 r_2),$$

wenn $r_1 r_2 > 2$ und $r_1 = a_\nu$, $r_2 = b_\mu$ ist.

Es kommt also in der Charakteristik des neuentstandenen Komplexes das Glied $r_1 r_2$ vor, falls r_1 und $r_2 > 2$, und es werden die Glieder r_1 und r_2, falls sie > 2 waren und überhaupt in den Charakteristiken von K_1 und K_2 vorkamen, weggelassen. Der neue Komplex hat dann den Index $r_1 r_2$.

Dies soll hier jedoch nur nebenbei bemerkt werden.

Zweites Kapitel.

Ein Beweis für die Endlichkeit der Klassenbasis.

§ 1. Vorbemerkungen.

Nach J.-M., Satz 11 gilt:

Sämtliche homogenen Komplexe einer Klasse lassen sich aus endlich vielen irreduziblen homogenen Komplexen derselben Klasse durch Addition erzeugen.

Dieser Satz soll nun dahin verallgemeinert werden, daß sich *alle* Elemente einer Klasse durch Addition aus endlich vielen irreduziblen Elementen ableiten lassen. Jede Klasse besitzt demnach eine endliche Basis oder, was dasselbe ist, jede Klasse besitzt nur endlich viele irreduzible Elemente.

Es besitzt nämlich jede Klasse c nur endlich viele Charakteristiken, die sich ganz leicht aus der Klassenkonstanten ableiten lassen. Diese Charakteristiken seien nun in einer gewissen Reihenfolge numeriert, etwa $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_r$. Jeder Komplex der Klasse ist dann durch ein System von r Zahlen $\{n_1, \ldots, n_r\}$ eindeutig bestimmt; hier sind die $n_\varrho \geqq 0$ und ganz rational; der dadurch bestimmte Komplex besitzt n_ϱ Geraden mit der Charakteristik χ_ϱ $(\varrho = 1, 2, \ldots, r)$. Auf die Reihenfolge der r Zahlen $n_1, \ldots, n_r$ kommt es hier also wesentlich an.

Nun sei N_ϱ das kleinste Element der als Klasse von Zahlen aufgefaßten Ähnlichkeitsklasse, die aus allen homogenen Komplexen der Charakteristik χ_ϱ besteht $(\varrho = 1, \ldots, r)$. Nach J.-M., Satz 15 ist ja keine Ähnlichkeitsklasse einer Klasse leer, es gibt in ihr also stets ein kleinstes Element N_ϱ. Man betrachte nun die $N = N_1 \cdots N_r$

Symbole $\{n_1, \ldots, n_r\}$, wo $0 \leqq n_\varrho < N_\varrho$ ist und über alle n_ϱ permutiert werde. Diesen Symbolen braucht natürlich nicht notwendig ein realisierbarer Komplex zu entsprechen, umgekehrt besitzt aber jeder Komplex ein solches Symbol.

Alle anderen Symbole teilen wir nun in N Restklassen ein, und zwar sollen zwei Symbole $\{l_1, \ldots, l_r\}$ und $\{m_1, \ldots, m_r\}$ derselben Restklasse angehören, wenn $l_1 \equiv m_1 \equiv n_1 \pmod{N_1}, \ldots, l_r \equiv m_r \equiv n_r \pmod{N_r}$ ist. Als Repräsentanten dieser Restklassen können wir die Symbole $\{n_1, \ldots, n_r\}$ mit $0 \leqq n_\varrho < N_\varrho$ nehmen. Jede Restklasse besitzt also genau einen Repräsentanten. Jedes Symbol und damit jeder Komplex gehört auch sicher einer dieser N Restklassen an.

Von diesen Restklassen scheiden nun einige aus, da keinem ihrer Symbole ein realisierbarer Komplex entspricht. Da doch die Komplexe eingeteilt werden sollen und nicht die Symbole, können wir Restklassen, die keinen realisierbaren Komplex enthalten, fortlassen.

In J.-M., Formel (4a), S. 242 war schon folgendes festgestellt worden: Kommt ein beliebiges Glied a in der Charakteristik χ_ϱ genau σ_ϱ-mal vor $(\varrho = 1, \ldots, r)$, $\sigma_\varrho \geqq 0$, was ja, da die Charakteristiken einer Klasse bestimmt sind, leicht feststellbar ist, und existiert ein Komplex der Klasse mit dem Symbol $\{m_1, \ldots, m_r\}$ $(m_\varrho \geqq 0)$, so ist

$$a \text{ ein Teiler von } \sigma_1 m_1 + \sigma_2 m_2 + \cdots + \sigma_r m_r.$$

Die Zahlen σ_ϱ sind durch die Klassenkonstante und das Glied a bestimmt. Jedes in einer der Charakteristiken $\chi_1, \ldots, \chi_r$ vorkommende Glied liefert eine solche Bedingung; wir erhalten also ein ganzes System von Teilbarkeitsbedingungen, denen die r Zahlen $m_1, \ldots, m_r$ offenbar gehorchen müssen, wenn der dem Symbol $\{m_1, \ldots, m_r\}$ entsprechende Komplex überhaupt realisierbar sein soll.

Im praktischen Fall läßt sich bei jedem Symbol $\{m_1, \ldots, m_r\}$ feststellen, ob es den Teilbarkeitsbedingungen genügt oder nicht. Genügt es diesen nicht, so können wir das Symbol weglassen. Genügt der Repräsentant einer Restklasse den Bedingungen nicht, so genügt diesen auch kein Element dieser Restklasse, und genügt der Repräsentant diesen Bedingungen, so genügen ihnen auch alle Elemente der zugehörigen Restklasse. Wird also ein Symbol weggelassen, so kann gleich die ganze Restklasse dieses Symbols gestrichen werden.

Eine Restklasse besitzt nämlich nur Elemente der Form

$$\{n_1 + p_1 N_1, n_2 + p_2 N_2, \ldots, n_r + p_r N_r\}, \quad 0 \leqq p_\varrho, \; 0 \leqq n_\varrho < N_\varrho \quad (\varrho = 1, \ldots, r).$$

Der Repräsentant dieser Restklasse ist also $\{n_1, \ldots, n_r\}$. Nun existieren aber nach Voraussetzung die Komplexe, die durch die

Symbole $\{0, \ldots, 0, N_\varrho, 0, \ldots, 0\}$ dargestellt werden $(\varrho = 1, \ldots, r)$. Also ist stets a ein Teiler von $\sigma_\varrho N_\varrho$ wegen

$$m_1 = m_2 = \cdots = m_{\varrho-1} = m_{\varrho+1} = \cdots = m_r = 0 \quad \text{und} \quad m_\varrho = N_\varrho.$$

Wenn nun der Repräsentant einer Restklasse den Teilbarkeitsbedingungen genügt bzw. nicht genügt, so geht jedes Glied a in dem zugehörigen $n_1 \sigma_1 + \cdots + n_r \sigma_r$ auf bzw. geht mindestens ein Glied a nicht in dem zugehörigen $n_1 \sigma_1 + \cdots + n_r \sigma_r$ auf. Dann aber geht a in

$$\sigma_1 (n_1 + p_1 N_1) + \cdots + \sigma_r (n_r + p_r N_r)$$

auf bzw. nicht auf, womit die Behauptung bewiesen ist.

Wir können also unser Restklassensystem auf $M \leqq N$ Restklassen reduzieren. Dies M ist jedenfalls eine endliche Zahl. Es genügt also jetzt zu zeigen, daß in jeder Restklasse sich nur endlich viele irreduzible Elemente befinden. Zu diesem Zweck greife man irgendeine Restklasse mit dem Repräsentanten $\{n_1, \ldots, n_r\}$ heraus.

§ 2. Beweis des Basissatzes.

Man zeichne r zu einer Achse A senkrechte, untereinander parallele Geraden, die als m_1-, ..., m_r-Achse bezeichnet werden (Fig. 1).

Allgemein trage man auf der m_ϱ-Achse $(\varrho = 1, , \ldots, r)$ die Werte $n_\varrho + N_\varrho x$ $(x = 0, 1, \ldots)$ von der Achse A aus ab. Wählt man dann auf jeder Achse je einen der so konstruierten Punkte aus und verbindet diese r Punkte durch Strecken, so erhält man einen Streckenzug, der genau einem Symbol unserer Restklasse entspricht.

Hat nämlich der auf der m_1-Achse ausgewählte Punkt die Ordinate m_1 usw., so entspricht dem Streckenzug das Symbol $\{m_1, \ldots, m_r\}$. Sämtliche Streckenzüge also, die die r Achsen nur einmal schneiden, und zwar in den vorher konstruierten Punkten, lassen sich eineindeutig allen Symbolen unserer Restklasse zuordnen.

Sei nun z irgendein solcher Streckenzug. Das zu z gehörige Symbol $\{m_1, \ldots, m_r\}$ entspreche einem realisierbaren Komplex der herausgegriffenen Restklasse. Das zwischen z und der Achse A gelegene Gebiet bezeichne man mit G. Ist nun z' ein beliebiger, von z verschiedener Streckenzug, der teilweise oder gar nicht mit z zusammenfällt, der also möglicherweise auch nur einzelne Punkte mit z gemein hat, jedoch so, daß z' nicht durch einen Flächenpunkt im Inneren von G geht, so entspricht das zu z' gehörige Symbol $\{m_1', \ldots, m_r'\}$ einem reduziblen Komplex der Restklasse. Denn es ist ja jedes

$m_\varrho' = m_\varrho + p_\varrho N_\varrho$ mit $\varrho = 1, \ldots, r$ und $p_\varrho \geqq 0$. Daher läßt sich $\{m_1', \ldots, m_r'\}$ aus $\{m_1, \ldots, m_r\}$ und den homogenen Komplexen

$$\{0, 0, \ldots, 0, p_\varrho N_\varrho, 0, \ldots, 0\} \qquad (\varrho = 1, \ldots, r),$$

die ja existieren, durch Addition zusammensetzen. Der Komplex $\{m_1', \ldots, m_r'\}$ ist daher reduzibel.

Nun denke man sich die Menge aller realisierbaren Komplexe der Restklasse vorgelegt. Jeder dieser Komplexe wird durch ein Symbol $\{m_1, \ldots, m_r\}$ repräsentiert, und jedes dieser Symbole kann durch einen Streckenzug dargestellt werden. Alle diese Streckenzüge denke man sich in das Achsensystem eingezeichnet.

Wenn nun von diesen möglicherweise unendlich vielen Streckenzügen ein Streckenzug z' die Eigenschaft hat, daß es einen von z' verschiedenen Zug z gibt, der ganz im Inneren oder auf dem Rande des von z', der Achse A und den Achsen m_1 und m_r begrenzten Gebietes verläuft, so lasse man z' fort. Streicht man so alle Züge mit dieser Eigenschaft weg, so können nur endlich viele Züge übrigbleiben. Wenn diese Behauptung bewiesen ist, so ist der Beweis für die Endlichkeit einer Klassenbasis erbracht.

Nun ist obige Behauptung bewiesen für $r = 1$, d. h. wenn es nur eine Achse gibt. Die Streckenzüge werden dann zu Punkten auf der m_1-Achse. Es soll dann von einer Punktreihe auf der m_1-Achse jeder Punkt weggelassen werden, der eine größere Ordinate hat als ein anderer Punkt. Dann bleibt nur ein Punkt übrig.

Die Behauptung sei also für ein System von $r - 1$ Achsen bewiesen. Wir denken uns dann für ein System von r Achsen alle in Frage kommenden Streckenzüge eingezeichnet. Von diesen Streckenzügen greifen wir einen Zug z heraus. G sei wieder das Gebiet zwischen z und der Achse A. G ist ein endliches Gebiet, und im Inneren von G liegen nur endlich viele, also etwa n der in Fig. 1 markierten Punkte.

Alle von z verschiedenen Streckenzüge, die nicht durch einen Flächenpunkt im Innern von G gehen, scheiden für unsere Betrachtung von vornherein aus. Alle noch verbleibenden Streckenzüge gehen also mindestens durch einen der markierten Punkte im Innern von G. Diese Züge teilen wir nun in n Unterklassen ein: wir vereinigen alle diejenigen Streckenzüge, die durch denselben Punkt im Innern von G gehen, zu einer Unterklasse. Dabei kann ein Streckenzug in mehreren solchen Unterklassen vorkommen, wenn er nämlich durch mehrere im Inneren von G gelegene, markierte Punkte geht. Dies stört jedoch unsere Betrachtungen nicht. Da die Zahl der Unterklassen endlich

ist, brauchen wir nur noch zu zeigen, daß in jeder Unterklasse sich nur endlich viele Züge befinden, die nicht weggelassen werden dürfen.

Sei nun P ein markierter Punkt im Innern von G. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir dann P auf der m_r-Achse annehmen, da es ja auf die Reihenfolge der Achsen in der Zeichnung nicht ankommt (Fig. 2). Angenommen, es gebe in der zu P gehörigen Unterklasse unendlich viele Züge, die nicht weggelassen werden dürfen.

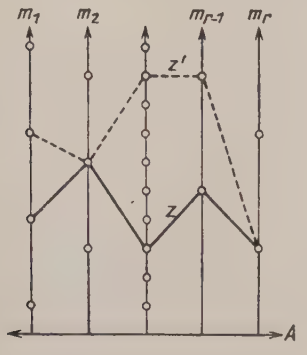

Fig. 1.

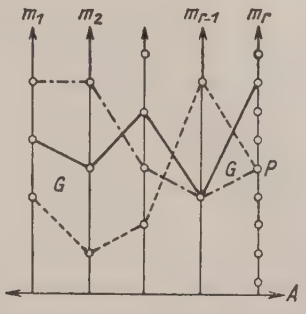

Fig. 2.

Alle diese Züge gehen durch P. Nun lasse man P sowie die letzten Strecken der Züge von der m_{r-1}-Achse bis zum Punkte P weg. Man erhält so ein System von $r-1$ Achsen.

Keiner der unendlich vielen verstümmelten Züge in dem $(r-1)$-achsigen System darf weggelassen werden; denn dürfte man einen Zug z^* streichen, so gäbe es einen Zug $z^{*\prime}$, der zwischen z^* und der Achse A verläuft. Verbinde ich dann aber die Endpunkte der Züge z^* und $z^{*\prime}$ auf der m_{r-1}-Achse mit P, so verläuft immer noch $z^{*\prime}$ zwischen z^* und A. Es dürfte dann also auch der vollständige Zug z^* im System von r Achsen weggelassen werden.

Da nun aber die Gültigkeit des Satzes für ein System von $r-1$ Achsen vorausgesetzt war, folgt sie also auch für r Achsen. Damit ist also bewiesen

Satz 4: *Alle Elemente einer Klasse lassen sich aus endlich vielen irreduziblen Elementen, die die Basis der Klasse bilden, durch Addition ableiten.*

Drittes Kapitel.

Spezielle Ähnlichkeitsklassen.

§ 1. Ähnlichkeitsklassen mit nur einem irreduziblen Element.

In J.-M., Satz 16 war gezeigt worden, daß es Ähnlichkeitsklassen gibt, deren Basis aus nur einem Element besteht. Es waren dies die Ähnlichkeitsklassen derjenigen Charakteristiken, deren Glieder paarweise teilerfremd sind.

Man kann nun die Frage aufwerfen, ob es noch andere Ähnlichkeitsklassen mit dieser Eigenschaft gibt und wie dann eine Charakteristik beschaffen sein muß, damit die Basis der zu dieser Charakteristik gehörigen Ähnlichkeitsklasse aus nur einem Element besteht.

In eine Ebene E zeichne man r sich nur in einfachen Punkten schneidende Geraden $g_1, \ldots, g_r$. Durch $g_1, \ldots, g_r$ lege man außer E noch je m Ebenen, jedoch so, daß alle diese Ebenen außerhalb von E sich in einfachen Geraden schneiden, und auch so, daß durch einen Punkt, der nicht der Ebene E angehört, höchstens drei dieser Ebenen gehen können.

Um eine bessere Vorstellung zu gewinnen, mache man E zur uneigentlichen Ebene. Man hat dann r Parallelenscharen von je m Ebenen, insgesamt also $N = r\,m$ Ebenen, da E nicht mitzählen soll.

Es wird nun behauptet, daß das System aller einfachen Schnittgeraden, in denen sich die N Ebenen schneiden, einen symmetrischen, homogenen Geradenkomplex bildet. Eine Gerade dieses Systems ist nämlich Schnittgerade zweier Ebenen, zu denen es je m parallele Ebenen gibt; also gibt es zu jeder Geraden des Systems m^2 parallele Geraden.

Weiter wird eine Gerade im Endlichen noch von $m(r-2)$ Ebenen geschnitten. Schneidet eine Ebene eine Gerade im Endlichen, so gehen durch den Schnittpunkt drei Ebenen und auch, wie man sich leicht überlegt, drei Schnittgeraden des Systems, dieses bildet also nach Projektion in eine Ebene einen symmetrischen Geradenkomplex.

In jeder Ebene liegen $m\,(r-1)$ Geraden des Komplexes; also besteht dieser, da durch jede Gerade zwei Ebenen gehen, aus

$$n = \frac{N\,m\,(r-1)}{2} = \frac{r\,m^2\,(r-1)}{2} = m^2 \binom{r}{2}$$

Geraden. Die Charakteristik lautet $(3, 3, \ldots, 3, m^2)$, wobei die 3 genau $m(r-2)$-mal auftritt.[2])

2) Kommt in einer Charakteristik ein Glied a mehrmals, etwa s-mal hintereinander vor, so schreibe ich für $a, a, \ldots, a$ auch kurz $a_{[s]}$. Die eben betrachtete Charakteristik lautet dann $(3_{[m(r-2)]}, m^2)$.

Von den Geraden sind nun je m^2 parallel. Da in der Ebene E keine Gerade des Komplexes liegt, sondern nur alle (m^2-1)-fachen Punkte, so läßt sich das System der n Geraden so in eine Ebene projizieren, daß keine mehrfachen Schnittpunkte zusammenfallen, in der Projektion also ein symmetrischer Komplex entsteht und außerdem die Ebene E in eine Gerade übergeht. Alle (m^2-1)-fachen Punkte liegen daher in der Projektion auf einer Geraden, die wir wieder zur uneigentlichen Geraden der Projektionsebene machen können. Dann bekommt der Komplex den Index m^2.

Durch $(p-1)$-malige Parallelverschiebung erhalten wir also den Komplex mit der Charakteristik $(3_{[m(r-2)]}, p m^2)$, bestehend aus $n = p m^2 \binom{r}{2}$ Geraden, außer wenn $p m^2 \leqq 2$, d. h. $m = 1$, $p \leqq 2$ ist.

Setzt man $m = p = 1$, so erhält man einen Komplex der Charakteristik $(3_{[r-2]})$ von $n = \binom{r}{2}$ Geraden. Mit diesen Komplexen werden wir uns dann näher zu beschäftigen haben.

Ein weiterer Spezialfall, der uns neue von den oben erwähnten Ähnlichkeitsklassen liefern wird, ist der Fall $r = 3$. Man erhält dann den Komplex der Charakteristik $(3_{[m]}, p m^2)$ mit $n = 3 p m^2$. Nach J.-M., Formel (4b) mit $x = 2$ und $x = p m^2 - 1$ ist aber für diese Charakteristik stets $3 \mid m n$ und $p m^2 \mid n$. Sind also m und p zu 3 teilerfremd, so ist $3 p m^2 \mid n$. Alle Zahlen der Lösungsmenge der Charakteristik $(3_{[m]}, p m^2)$ sind dann also Vielfache von $3 p m^2$. Da aber der Komplex mit $3 p m^2$ Geraden existiert, so ist er der einzige irreduzible in dieser Ähnlichkeitsklasse.

Allgemein kann man folgendes aussagen:

Satz 5: *Die Basis der Ähnlichkeitsklasse mit der Charakteristik*

$$(a_1, \cdots, a_l, 3_{[m]})$$

besitzt nur ein Element, falls

1. *die a_ν paarweise untereinander und zu 3 teilerfremd sind,*
2. *ein Glied a_μ den quadratischen Faktor m^2 enthält, wo m die Anzahl der Glieder mit dem Wert 3 in der Charakteristik bedeutet.* (Es darf also dann m nicht durch 3 teilbar sein.)

Die Richtigkeit der Behauptung folgt leicht daraus, daß man mit der früher eingeführten Methode der Parallelverschiebung von Komplexen beliebige Glieder an eine Charakteristik anhängen kann (J.-M., Satz 14), wobei die Geradenanzahl noch mit diesen Gliedern zu multiplizieren ist. Es gibt also den Komplex mit $n = 3 a_1 \cdots a_l$ Geraden und der Charakteristik $(a_1, \ldots, a_l, 3_{[m]})$. Wegen der oben genannten Bedingungen, die die Glieder $a_1, \ldots, a_l$ erfüllen müssen, bestätigt man leicht, daß $3 a_1 \cdots a_l$ ein Teiler von n sein muß. Damit ist die Behauptung bewiesen.

§ 2. Konstruktion von symmetrischen Komplexen in mehrdimensionalen Räumen.

Wir hatten vorhin den Spezialfall $m = p = 1$. Dies bedeutet, daß die Parallelenscharen der Ebenen nur aus je einer Ebene bestehen. Wir haben dann im projektiven Raum n Ebenen allgemeiner Lage, deren Schnittgeraden bei geeigneter Projektion in eine Ebene einen symmetrischen Geradenkomplex liefern.

Diese Konstruktionsmethode läßt sich noch verallgemeinern:

Wir denken uns zunächst in der projektiven Ebene t Geraden allgemeiner Lage gegeben, d. h. jede Gerade ist nicht inzident mit den Schnittpunkten aller anderen Geraden. Diese t Geraden bilden den trivialen symmetrischen Komplex von $\binom{t}{1}$ Geraden und $\binom{t}{2}$ Punkten. Es liegen dabei auf jeder Geraden $t-1$ Punkte der Wertigkeit 1.

Nunmehr seien im dreidimensionalen projektiven Ebenenraum t Ebenen allgemeiner Lage gegeben, d. h. jede Ebene ist nicht inzident mit allen Schnittpunkten und Schnittgeraden der übrigen Ebenen. Diese t Ebenen schneiden sich dann in $\binom{t}{2}$ Schnittgeraden und $\binom{t}{3}$ Schnittpunkten. Denn in jeder Ebene liegen $t-1$ Schnittgeraden, in t Ebenen also $t(t-1)$ Schnittgeraden, wobei aber jede Schnittgerade doppelt gezählt wurde, da sie genau zwei Ebenen angehört. Ferner liegen in jeder Ebene $\binom{t-1}{2}$ Schnittpunkte, in t Ebenen also $t\binom{t-1}{2}$ Schnittpunkte, wobei aber jeder Schnittpunkt 3-mal gezählt wurde, da sich drei Ebenen in ihm schneiden.

Es liegen ferner auf jeder Schnittgeraden genau $t-2$ dieser $\binom{t}{3}$ Punkte. Durch jeden solchen Punkt gehen aber drei Ebenen, also auch drei Geraden, und da dies die einzigen mehrfachen Punkte sind, in denen sich die Geraden des Systems schneiden können, so hat jede Gerade die Charakteristik $(3_{[t-2]})$; man erhält also bei der Projektion in eine Ebene einen symmetrischen Geradenkomplex der Charakteristik $(3_{[t-2]})$ mit $n = \binom{t}{2}$ Geraden.

Analog kann man nun im mehrdimensionalen projektiven Raum R_a verfahren: In einem R_a nehme man t Räume R_{a-1} allgemeiner Lage an. Dieser Komplex besteht dann aus $\binom{t}{1}$ Räumen R_{a-1}, aus $\binom{t}{2}$ Räumen R_{a-2}, ..., aus $\binom{t}{a-2}$ Ebenen, aus $\binom{t}{a-1}$ Geraden und aus $\binom{t}{a}$ Punkten. Durch Projektion entsteht daraus für $a \geqq 3$ der symmetrische Geradenkomplex der Charakteristik $(a_{[t-a+1]})$ mit $\binom{t}{a-1}$ Geraden. Diese Konstruktionsmethode wurde schon von

CAYLEY gefunden; sie diente dort aber zur Auffindung neuer Konfigurationen.

In der Tat können ja auch die so gefundenen Geradenkomplexe als Konfigurationen gedeutet werden, wenn man die einfachen Schnittpunkte [abgesehen von dem Fall $(n, n-1)$ der Ebene] nicht mitrechnet, sondern zur Konfiguration nur alle Geraden des Komplexes und alle Schnittpunkte der Wertigkeit $a-1$ hinzunimmt. Jeder Schnittpunkt des Komplexes ist ja entweder einwertig oder $(a-1)$-wertig. Es gilt mithin

Satz 6: *Es gibt für* $a \geqq 3$ *homogene Komplexe der Charakteristik* $(a_{[t-a+1]})$ *mit* $n = \binom{t}{a-1}$ *Geraden, wobei* $t \geqq a$ *ist. Setzt man also* $t-a+1 = s$, *d. h.* $t = s+a-1$, *so gibt es von der Charakteristik* $(a_{[s]})$ *mit* $a \geqq 3$, $s \geqq 1$ *den Komplex mit* $n = \binom{s+a-1}{a-1} = \binom{a+s-1}{s}$ *Geraden.*

§ 3. Vollständige Lösungsmengen.

Es sei nun irgendein Komplex von n Geraden und der Charakteristik $\chi = (a_{1[s_1]}, a_{2[s_2]}, \ldots, a_{l[s_l]})$ gegeben; dann ist nach J.-M., Formel (4b)

$$a_1 \mid s_1 n,\ a_2 \mid s_2 n,\ \ldots,\ a_l \mid s_l n.$$

Ist der größte gemeinsame Teiler $(a_\nu, s_\nu) = t_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, l)$ und das kleinste gemeinschaftliche Vielfache $\left(\frac{a_1}{t_1}, \frac{a_2}{t_2}, \ldots, \frac{a_l}{t_l}\right) = d$, so soll d der Modul der Charakteristik genannt werden. Jede Charakteristik besitzt offenbar einen Modul, der durch sie eindeutig bestimmt ist.

Enthält die zur Charakteristik gehörende Lösungsmenge (vgl. J.-M., S. 253) zwei oder mehr Zahlen, deren größter gemeinsamer Teiler gleich d ist, so ist offenbar jedes Vielfache von d, welches größer als eine feste Zahl N_0 ist, in der Lösungsmenge enthalten. Diese soll dann *vollständig* genannt werden. Wissen wir von einer Lösungsmenge, daß sie vollständig ist, so sind ihre Elemente bis auf endlich viele bekannt, da jedes ein Vielfaches von d sein muß.

Ferner soll eine Charakteristik vollständig genannt werden, wenn ihre zugehörige Lösungsmenge vollständig ist. Es gilt nun allgemein folgender Satz:

Satz 7: *Jede Charakteristik der Form* $(a_{[s]})$ *ist vollständig.*

Beweis: Es sei $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ und $p_1, \ldots, p_k$ verschiedene Primzahlen, die so numeriert seien, daß $p_1^{\alpha_1} < p_2^{\alpha_2} < \cdots < p_k^{\alpha_k}$ gilt. Ich unterscheide nun mehrere Fälle.

1. Es sei s von der Form $s = q\, p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$ mit $(a, q) = 1$, $\beta_\nu \leqq \alpha_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$.

a) $0 < s \leqq p_1^{\alpha_1}$. Dann ist der Modul der Charakteristik $(a_{[s]})$ gleich

$$p_1^{\alpha_1-\beta_1}\, p_2^{\alpha_2-\beta_2} \cdots p_k^{\alpha_k-\beta_k}.$$

Von der Charakteristik $(a_{[s]})$ gibt es nun den Komplex mit $n = \binom{a+s-1}{s}$ Geraden. Wäre in

$$\binom{a+s-1}{s} = \frac{(a+s-1)\cdots a}{s!} = \frac{p_1^{\alpha_1-\beta_1}\cdots p_k^{\alpha_k-\beta_k}}{q} \prod_{r=1}^{s-1} \frac{a+r}{r} = n$$

$a + r$ teilbar durch $p_\nu^{\alpha_\nu+1}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$, so wäre

$$a + r = t\, p_\nu^{\alpha_\nu+1}, \qquad r = t\, p_\nu^{\alpha_\nu+1} - a,$$

also r teilbar durch $p_\nu^{\alpha_\nu}$, was wegen $1 \leqq r \leqq s-1 < s \leqq p_1^{\alpha_1} \leqq p_\nu^{\alpha_\nu}$ unmöglich ist. Ebenso kann $a + r$ durch keine höhere Potenz von p_ν $(\nu = 1, \ldots, k)$ teilbar sein. Ist aber $a + r$ teilbar durch $p_\nu^{\alpha_\nu}$, so ist auch r teilbar durch $p_\nu^{\alpha_\nu}$. Dasselbe gilt für jede kleinere Potenz von p_ν. Da man dann den Faktor $p_\nu^{\alpha_\nu}$ durch Kürzen beseitigen kann, so ist $\frac{1}{q} \prod_{r=1}^{s-1} \frac{a+r}{r}$, das ja eine ganze rationale Zahl darstellt, teilerfremd zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

Da es von der Charakteristik $(a_{[s]})$ außerdem den Komplex mit $\bar{n} = a^s$ Geraden gibt und der größte gemeinsame Teiler

$$(n, \bar{n}) = p_1^{\alpha_1-\beta_1} \cdots p_k^{\alpha_k-\beta_k}$$

ist, so ist für diesen Fall die Vollständigkeit bewiesen.

Speziell gibt es also für $s = p_1^{\alpha_1}$ einen Komplex, dessen n teilerfremd ist zu p_1. Ist $s = \bar{q}\, p_1^{\alpha_1}$ mit $\bar{q} \geqq 1$, so gibt es daher ebenfalls einen Komplex, dessen n teilerfremd zu p_1 ist. Dies folgt aus der Multiplikation.

b) $p_1^{\alpha_1} < s \leqq p_2^{\alpha_2}$. Dann läßt sich s in der Form schreiben: $s = \bar{q}\, p_1^{\alpha_1} + \varrho$, wo $0 \leqq \varrho < p_1^{\alpha_1}$ und $\bar{q} \geqq 1$ ist. Von der Charakteristik $(a_{[s]})$ gibt es dann einen Komplex mit $n_1^{\varrho}\, n_2 = n$ Geraden, wenn es von der Charakteristik $(a_{[p_1^{\alpha_1}]})$ einen solchen mit n_1 und von $(a_{[\varrho]})$ einen solchen mit n_2 Geraden gibt. n_1 kann jetzt als teilerfremd zu p_1 angenommen werden, folglich auch $n_1^{\bar{q}}$. Da $\varrho < p_1^{\alpha_1}$ ist, so kann n_2 so gewählt werden, daß es den Primfaktor p_1 genau $(\alpha_1 - \beta_1)$-mal enthält. Dann enthält n den Primfaktor p_1 genau $(\alpha_1 - \beta_1)$-mal.

Von der Charakteristik $(a_{[s]})$ gibt es außerdem noch den Komplex

$$\binom{a+s-1}{s} = \frac{p_1^{\alpha_1-\beta_1}\cdots p_k^{\alpha_k-\beta_k}}{q} \prod_{r=1}^{s-1} \frac{a+r}{r} = \bar{n}.$$

Wäre $a+r$ teilbar durch p_ν^{μ} mit $\mu > \alpha_\nu$ und $\nu = 2, 3, \ldots, k$, so wäre wieder $a+r = t p_\nu^{\mu}$ oder r durch $p_\nu^{\alpha_\nu}$ teilbar, was wegen $1 \leqq r \leqq s-1 < s \leqq p_2^{\alpha_2} \leqq p_\nu^{\alpha_\nu}$ unmöglich ist. Ist aber $a+r$ durch $p_\nu^{\alpha_\nu}$ bzw. eine kleinere Potenz von p_ν ($\nu = 2, 3, \ldots, k$) teilbar, so ist es auch r, woraus wieder folgt, daß $\bar{n}$ die Primfaktoren $p_2, \ldots, p_k$ in der gewünschten Potenz enthält.

Da es nun noch den Komplex $\bar{\bar{n}} = a^s$ gibt und der größte gemeinsame Teiler $(n, \bar{n}, \bar{\bar{n}}) = p_1^{\alpha_1-\beta_1} \cdots p_k^{\alpha_k-\beta_k}$ ist, so ist die Vollständigkeit auch hierfür bewiesen.

Ist speziell $s = p_2^{\alpha_2}$, so gibt es für diese Charakteristik wieder einen Komplex, dessen n teilerfremd zu p_2 ist. Dasselbe gilt für $s = \bar{\bar{q}}\, p_2^{\alpha_2}$ ($\bar{\bar{q}} \geqq 1$).

c) $p_2^{\alpha_2} < s \leqq p_3^{\alpha_3}$. Hier wiederholt sich die Schlußweise. Man stellt s zweimal dar, nämlich:

$$s = \bar{q}\, p_1^{\alpha_1} + \varrho_1 \quad \text{mit} \quad \bar{q} \geqq 1, \quad 0 \leqq \varrho_1 < p_1^{\alpha_1},$$
$$s = \bar{\bar{q}}\, p_2^{\alpha_2} + \varrho_2 \quad \text{mit} \quad \bar{\bar{q}} \geqq 1, \quad 0 \leqq \varrho_2 < p_2^{\alpha_2}.$$

Wir werden hier analog vier Komplexe konstruieren, deren größter gemeinsamer Teiler gleich dem gewünschten Modul wird. So läßt sich das Verfahren fortsetzen bis $p_{k-1}^{\alpha_k-1} < s \leqq p_k^{\alpha_k}$.

d) Ist aber $s > p_k^{\alpha_k}$, so gilt ebenfalls dieselbe Schlußweise. Wir haben dann k Darstellungen von s:

$$s = \bar{q}\, p_1^{\alpha_1} + \varrho_1 = \bar{\bar{q}}\, p_2^{\alpha_2} + \varrho_2 = \cdots = q^{(k)}\, p_k^{\alpha_k} + \varrho_k.$$

2. Es ist nun noch der Fall zu betrachten, daß $s = q\, p_1^{\gamma_1} \cdots p_k^{\gamma_k}$, wo $(a, q) = 1$, aber einige oder alle γ_ν größer als die entsprechenden α_ν sind. Sei etwa $\gamma_1 > \alpha_1$ und sonst alle $\gamma_\nu \leqq \alpha_\nu$. Dann hat offenbar der Modul von $(a_{[s]})$ den Wert $p_2^{\alpha_2-\gamma_2} \cdots p_k^{\alpha_k-\gamma_k}$. Nun ist

$$s = (q\, p_1^{\alpha_1} p_2^{\gamma_2} \cdots p_k^{\gamma_k})\, p_1^{\gamma_1-\alpha_1} = s'\, p_1^{\gamma_1-\alpha_1}.$$

Für $(a_{[s']})$ gibt es einen Komplex, dessen n zu p_1 teilerfremd ist. Da $n^{(p_1^{\gamma_1-\alpha_1})}$ dann ebenfalls zu p_1 teilerfremd ist, so ist auch dieser Fall erledigt.

Satz 7 ist also bewiesen.

Satz 8: *Hat eine Charakteristik den Modul 1, so ist sie vollständig.*

Eine Charakteristik χ kann nämlich immer in der Form geschrieben werden:

$$\chi = (a_{1[s_1]}, a_{2[s_2]}, \ldots, a_{l[s_l]}).$$

Da aber der Modul 1 ist, so muß $a_1 \mid s_1, \ldots, a_l \mid s_l$ sein. Die Charakteristiken $\chi_1 = (a_{1[s_1]})$ und $\chi_2 = (a_{2[s_2]}, \ldots, a_{l[s_l]})$ haben daher beide den Modul 1, χ_1 ist nach Satz 7 vollständig, und es ist $\chi = (\chi_1, \chi_2)$. Ist χ_2 vollständig, so ist die Behauptung bewiesen. Denn die

Lösungsmenge von χ_1 bzw. χ_2 hat bis auf endliche Werte die Form $M_0 + x$ bzw. $N_0 + x$ $(x = 0, 1, \ldots)$. Es gibt also in der Lösungsmenge von χ ein Element

$$n = (2M_0 + 1)(2N_0 + 1) = 4M_0N_0 + 2M_0 + 2N_0 + 1,$$

ebenso Elemente $n' = (M_0 + 1)\,2N_0$ und $n'' = (N_0 + 1)\,2M_0$ und damit auch ein Element $\bar{n} = n' + n'' = n - 1$. Also gibt es in der Lösungsmenge von χ zwei teilerfremde Elemente, diese ist daher vollständig.

Die Vollständigkeit von χ_2 läßt sich aber genau ebenso beweisen, indem man χ_2 durch Abspaltung von $(a_{2[s_2]})$ in zwei Teilcharakteristiken zerlegt. So fortfahrend, stößt man schließlich auf eine Zerlegung in zwei Teilcharakteristiken, die beide vollständig sind und den Modul 1 haben.

Es gilt ferner folgender Satz:

Satz 9: *Zerfällt eine Charakteristik $\chi = (a_1, \ldots, a_l)$ in zwei Teilcharakteristiken χ_1 und χ_2, so daß $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ ist, und ist jedes Glied der Charakteristik χ_1 teilerfremd zu jedem Glied der Charakteristik χ_2, sind ferner die zugehörigen Lösungsmengen von χ_1 und χ_2 vollständig, so ist auch die zu χ gehörige Lösungsmenge vollständig.* Anders ausgedrückt: *Läßt sich eine Charakteristik in zwei teilerfremde, vollständige Teilcharakteristiken zerspalten, so ist sie selbst vollständig.*

Beweis: Sei d der Modul von χ, d_1 der von χ_1 und d_2 der von χ_2. Wegen der Teilerfremdheit von χ_1 und χ_2 ist dann $d = d_1 d_2$. Die Lösungsmenge von χ_1 hat bis auf endlich viele Werte die Form: $M_0 + d_1 x$ $(x = 0, 1, 2, \ldots)$; die von χ_2 hat die Form: $N_0 + d_2 x$ $(x = 0, 1, 2, \ldots)$. Dann sind, da $d_1 \mid M_0$ und $d_2 \mid N_0$ ist,

$$n = (2M_0 + d_1)(2N_0 + d_2) = 4M_0N_0 + 2M_0d_2 + 2N_0d_1 + d_1d_2,$$

$$n' = (M_0 + d_1)\,2N_0 \text{ und } n'' = (N_0 + d_2)\,2M_0$$

Elemente der Lösungsmenge von χ und damit auch

$$\bar{n} = n' + n'' = n - d.$$

Also ist $(n, \bar{n}) = d$. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 10: *Zerfällt eine Charakteristik χ in zwei Teilcharakteristiken, von denen eine, etwa χ_1, den Modul 1 hat, die andere, χ_2, vollständig ist, so ist auch $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ vollständig.*

Beweis: Der Modul von χ ist jedenfalls höchstens gleich dem Modul d von χ_2. Denn die Lösungsmenge von χ_1 hat, da auch χ_1 vollständig ist, die Form $M_0 + x$ $(x = 0, 1, 2, \ldots)$; die von χ_2 hat die Form $N_0 + d\,x$ $(x = 0, 1, 2, \ldots)$. Von χ gibt es also die Komplexe

$$n_1 = (2M_0 + 1)(2N_0 + d) = 4M_0N_0 + 2M_0d + 2N_0 + d,$$

$$n_2 = 2M_0(N_0 + d) = 2M_0N_0 + 2M_0d,$$

$$n_3 = 2N_0(M_0 + 1) = 2M_0N_0 + 2N_0,\ n_2 + n_3 = n_1 - d,$$

Daher ist der größte gemeinsame Teiler $(n_1, n_2 + n_3) = d$. Der Modul von χ ist also $\leqq d$, und wenn er gleich d ist, so ist χ vollständig.

Ist $\chi_1 = (a_{1[s_1]}, a_{2[s_2]}, \ldots, a_{l[s_l]})$, so ist, da der Modul 1 ist, $a_1 | s_1, \ldots, a_l | s_l$. Läßt man zu, daß die s_ν und die $t_\nu \geqq 0$ sind, so kann man schreiben:

$$\chi_1 = (a_{1[s_1]}, \ldots, a_{l[s_l]}), \qquad \chi_2 = (a_{1[t_1]}, \ldots, a_{l[t_l]}).$$

Dann hat aber, da der größte gemeinsame Teiler $(s_\nu + t_\nu, a_\nu) = (t_\nu, a_\nu)$ ist, der Modul von χ den Wert d.

Schließlich gilt noch folgender

Satz 11: *Hat in der Charakteristik $\chi = (a_1, \ldots, a_l)$ jedes Glied mit höchstens einem anderen einen größten gemeinsamen Teiler > 1 gemein und ist es sonst zu allen anderen teilerfremd, so ist die Charakteristik vollständig.*

Beweis: Man greife aus der Charakteristik ein beliebiges Glied heraus. Dann gibt es höchstens noch ein zu diesem nicht teilerfremdes Glied der vorgegebenen Charakteristik. Diese beiden Glieder (evtl. ist es nur eines) vereinige man zu einer Teilcharakteristik χ_1, alle anderen zur Charakteristik χ_2. Nach früheren Resultaten ist jede Charakteristik, die aus einem oder zwei Gliedern besteht, vollständig. Die Charakteristiken χ_1 und χ_2 sind teilerfremd. Wenn also auch χ_2 vollständig ist, so wäre unser Satz bewiesen.

Um nun die Vollständigkeit von χ_2 zu beweisen, verfahren wir genau ebenso. Wir zerspalten χ_2 wieder in zwei Teilcharakteristiken, die teilerfremd sind und von denen die eine nur höchstens zwei Elemente enthält. Die eine Teilcharakteristik ist wieder vollständig; hat die andere noch mehr als zwei Glieder, so wird sie wieder zerlegt. Da die Zahl der Glieder bei jedem Schritt abnimmt, haben wir schließlich nur noch zwei teilerfremde, vollständige Teilcharakteristiken.

Anhang.

Für die symmetrischen Geradenkomplexe läßt sich noch folgende Eigenschaft nachweisen.

Satz 12: *Es seien in der projektiven Ebene n Geraden ohne jede Vorschrift gegeben, die den beliebigen, nicht notwendig symmetrischen Komplex A bilden mögen. Dann läßt sich durch bloßes Hinzuzeichnen neuer Geraden der Komplex A stets zu einem symmetrischen Komplex S ergänzen.*

Vorbemerkung zum Beweis: In J.-M., Satz 4 war gezeigt worden, daß die Charakteristiken aller Geraden eines symmetrischen Komplexes derselben Klasse angehören (diese Bedingung ist, nebenbei

bemerkt, für die Symmetrie auch hinreichend). Zwei Charakteristiken χ_1 und χ_2 heißen dabei der Klasse c angehörig, wenn die Summe aller um 2 verminderten Glieder einer Charakteristik χ_1 bzw. χ_2 denselben Wert c hat.

Sei ferner A ein beliebiger, nicht notwendig symmetrischer Geradenkomplex von n Geraden. Addiert man die Glieder der Zerlegung einer Geraden von A, so hat diese Summe bei jeder Geraden den Wert $n-1$.

Kombiniert man diese beiden Tatsachen miteinander, so ergibt sich daraus eine Möglichkeit, die Charakteristiken der Geraden von A durch Hinzufügen neuer Geraden so abzuändern, daß sie derselben Klasse angehören.

Man lege nämlich r neue Geraden $g_1, \ldots, g_r$ so hin, daß durch jeden Schnittpunkt des beliebigen Komplexes A genau eine der Geraden $g_1, \ldots, g_r$ geht. Sei nun g eine Gerade von A. Die Zerlegung von g vor der Hinzufügung der Geraden $g_1, \ldots, g_r$ sei $\zeta = (a_1, \ldots, a_l, 1, \ldots, 1)$, wo die Summe der Glieder von ζ den Wert $n-1$ hat. Die Charakteristik von g ist dann $\chi = (a_1 + 1, \ldots, a_l + 1)$; nach Hinzufügen der Geraden $g_1, \ldots, g_r$ aber wird die Charakteristik von g gleich $\chi' = (a_1 + 2, \ldots, a_l + 2, 3, \ldots, 3)$, und es gehört χ' der Klasse $c = n - 1$ an. Dies gilt aber für jede Gerade von A.

Sorgen wir nun noch dafür, daß die Charakteristiken der Geraden $g_1, \ldots, g_r$ derselben Klasse $c = n - 1$ angehören, so haben wir A zu einem symmetrischen Komplex ergänzt.

Beweis von Satz 12: Der beliebige Komplex A habe s_1 einfache, s_2 zweifache, $\ldots$, s_ϱ ϱ-fache Schnittpunkte, wo ϱ die maximale Wertigkeit aller in A vorkommenden Schnittpunkte sei. Es ist klar, daß man durch Hinzufügen neuer Geraden den Komplex A zu einem neuen ergänzen kann, welcher nur ein- oder ϱ-fache Schnittpunkte besitzt. Von vornherein können wir also voraussetzen, daß unser Ausgangskomplex A aus n Geraden und s Schnittpunkten bestehe, wo $s = s_1 + s_\varrho$ ist.

Ich will nun zeigen, daß durch nochmaliges Hinzufügen neuer Geraden der Komplex A zu einem neuen Komplex A' von n' Geraden und s_ϱ' ϱ-fachen Punkten und der gleichen Form wie A (also $s' = s_1' + s_\varrho'$) so ergänzt werden kann, daß außerdem noch die Relation $s_\varrho' = n' + 1 - \varrho$ gilt. Dazu können wir zwei Fälle unterscheiden.

1. Angenommen, in A sei $s_\varrho > n + 1 - \varrho$.

Dann können wir, falls $s_\varrho - (n + 1 - \varrho) = p > 0$, p neue Geraden hinzuzeichnen, die sich untereinander und die die Geraden von A in

nur einfachen Punkten schneiden. Es wird dann $n' = n + p$ und $s_\varrho' = s_\varrho$, also $s_\varrho' - (n' + 1 - \varrho) = 0$. Es hat dann A' die gewünschte Eigenschaft.

2. Für A gelte nun $s_\varrho < n + 1 - \varrho$.

Ein homogener symmetrischer Komplex von der Charakteristik $\chi = (\varrho + 1_{[\sigma_\varrho]})$ und m Geraden hat nach J.-M., Formel (4b) $s_\varrho = \frac{m\sigma_\varrho}{\varrho + 1}$ ϱ-fache Schnittpunkte. Setzen wir also etwa $\sigma_\varrho = 2(\varrho + 1)$, so wird $s_\varrho = 2m$.

Nach Satz 7 existieren diese homogenen, symmetrischen Komplexe für jedes $m > M(\varrho)$; denn der Modul der Charakteristik χ ist für $\sigma_\varrho = 2(\varrho + 1)$ gleich 1. $M(\varrho)$ ist eine nur von ϱ abhängige Konstante.

Addieren wir nun (im Sinne der in J.-M. eingeführten Addition zweier symmetrischer Geradenkomplexe) zu unserem Komplex A den symmetrischen homogenen Komplex der Charakteristik χ mit $\sigma_\varrho = 2(\varrho + 1)$ und m Geraden, wo über m noch passend verfügt werden wird, so erhalten wir einen nicht notwendig symmetrischen Komplex A' von n' Geraden, dessen s' Schnittpunkte entweder einfach oder ϱ-fach sind. Ferner ist hier $n' = n + m$ und $s_\varrho' = s_\varrho + 2m$ = Anzahl der ϱ-fachen Schnittpunkte von A'. Soll also für A' gelten:

$$s_\varrho' = s_\varrho + 2m > n' + 1 - \varrho = n + m + 1 - \varrho,$$

so brauchen wir nur $m > n + 1 - \varrho - s_\varrho$ und gleichzeitig $m > M(\varrho)$ zu wählen. Für diesen Komplex A' liegt dann Fall 1 vor, da hier $s_\varrho' > n' + 1 - \varrho$ ist.

Damit ist also nun bewiesen: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir bei unserem Ausgangskomplex A folgende Eigenschaften voraussetzen:

1. A bestehe aus n Geraden und s Schnittpunkten.
2. A habe s_1 einfache und s_ϱ ϱ-fache Punkte, so daß $s = s_1 + s_\varrho$.
3. Ferner gelte $s_\varrho = n + 1 - \varrho$.

Für den symmetrischen, homogenen Komplex K der Charakteristik χ mit m Geraden und $\sigma_\varrho = \varrho + 1$ gilt $s_\varrho = m$. Addieren wir also einen solchen Komplex K zu unserem Komplex A, so bleiben die drei oben erwähnten Eigenschaften von A erhalten. Insbesondere gilt also noch für den neuen Komplex A' von $n' = n + m$ Geraden und $s_\varrho' = s_\varrho + m$ ϱ-fachen Punkten

$$s_\varrho' = n' + 1 - \varrho.$$

Die Anzahl der einfachen Schnittpunkte s_1' von A' bestimmt sich nun folgendermaßen: Es ist (vgl. die Anmerkung in J.-M., S. 246f.), falls s_1 die Anzahl der einfachen Schnittpunkte von A, t_1 diejenige von K ist,

$$s_1' = s_1 + t_1 + nm.$$

Nun ist nach J.-M., Formel (6) beim Komplex A

$$n(n-1) = 2s_1 + (\varrho+1)\,\varrho\, s_\varrho = 2s_1 + (\varrho+1)\,\varrho\,(n+1-\varrho)$$

und beim Komplex K

$$m(m-1) = 2t_1 + (\varrho+1)\,\varrho\, m.$$

Also wird

$$\begin{aligned} s_1' &= \tfrac{1}{2}\,(n(n-1) - (\varrho+1)\,\varrho\,(n+1-\varrho) + m(m-1) - (\varrho+1)\,\varrho\, m) + mn \\ &= \tfrac{1}{2}\,((m+n)^2 - (m+n) - (\varrho+1)\,\varrho\,(n+m+1-\varrho)) \\ &= \frac{m+n}{2}\,[m+n-1-(\varrho+1)\,\varrho] + \frac{(\varrho+1)\,\varrho\,(\varrho-1)}{2}. \end{aligned}$$

Es besteht nun A' aus $n' = n + m$ Geraden. Über die Zahl m können wir ferner beliebig verfügen (der Modul der Charakteristik χ mit $\sigma_\varrho = \varrho + 1$ hat ja den Wert 1), es muß nur $m > M'(\varrho)$ sein, wo M' wieder eine nur von ϱ abhängige Konstante ist. Wir wählen die Zahl m so, daß

1. $n' = n + m$ ungerade,
2. $\frac{n+m-1}{2} > \binom{\varrho+1}{2}$,
3. $m > M'(\varrho)$

wird. Es wird dann nämlich $p = \frac{m+n-1}{2} - \binom{\varrho+1}{2}$ eine ganze, positive Zahl und

$$s_1' = (m+n)\,p + \frac{(\varrho+1)\,\varrho\,(\varrho-1)}{2}.$$

Da wir bisher stets nur neue Geraden hinzugezeichnet haben, können wir also nun von unserem Ausgangskomplex A ohne Beschränkung der Allgemeinheit endgültig folgende Eigenschaften voraussetzen:

1. A bestehe aus n Geraden, s_1 einfachen und s_ϱ ϱ-fachen Punkten, so daß $s = s_1 + s_\varrho$.
2. n sei ungerade.
3. Es sei $s_\varrho = n + 1 - \varrho$.
4. Es sei $s_1 = n\,p + \frac{(\varrho+1)\,\varrho\,(\varrho-1)}{2}$, wo $p > 0$ und ganz.

Endlich können wir noch $\varrho > 1$ voraussetzen, da für $\varrho = 1$ der Komplex A schon symmetrisch wäre. Es ist also $(\varrho+1)\,\varrho\,(\varrho-1)$ eine positive, ganze, durch 3 teilbare Zahl.

Nunmehr können wir den in der Vorbemerkung entwickelten Gedanken durchführen. Wir wählen in der Ebene des Komplexes A einen Punkt P so, daß die s_ϱ Verbindungslinien $g_1, \ldots, g_{s_\varrho}$ des Punktes P mit den ϱ-fachen Schnittpunkten von A mit keinem weiteren Schnittpunkt von A inzident sind. Durch jeden ϱ-fachen Punkt von A geht also genau eine neu hinzugezeichnete Gerade. Wir

werden nun die Charakteristiken der s_ϱ Geraden $g_1, \ldots, g_{s_\varrho}$ nicht mehr ändern. Die Charakteristik einer solchen Geraden hat aber die Form

$$(\varrho + 2, s_\varrho) = (\varrho + 2, n + 1 - \varrho),$$

sie gehört also der Klasse $c = n - 1$ an.

Entsprechend wählen wir nun p Punkte $P_1, \ldots, P_p$ so, daß, falls wir jeden Punkt P_ν mit genau n einfachen Schnittpunkten von A verbinden, diese $n\,p$ Verbindungsgeraden mit keinem schon vorhandenen Schnittpunkt (abgesehen von den beiden Punkten, die sie verbinden) inzident sind. Die $n\,p$ Verbindungsgeraden haben also die Charakteristik $(3, n)$, welche der Klasse $c = n - 1$ angehört.

Jetzt gehen also auch durch gewisse $n\,p$ einfache Punkte des Komplexes A neue Geraden (und zwar je eine) hindurch. Es bleiben noch $\frac{(\varrho + 1)\,\varrho\,(\varrho - 1)}{2} = q$ einfache Punkte von A, durch welche wir noch je eine Gerade legen müssen. Dann gehören nämlich nach der Vorbemerkung auch die Charakteristiken der Geraden von A der Klasse $c = n - 1$ an.

Nun brauchen wir zur Ausführung dieses letzten Schrittes noch folgende inhomogene, symmetrische Komplexe:

Läßt man in einer Ebene zwei zueinander senkrechte Parallelenscharen von je $2\,z$ Geraden, die gleichen Abstand voneinander haben, in einem Quadratnetz sich schneiden und zeichnet man noch die

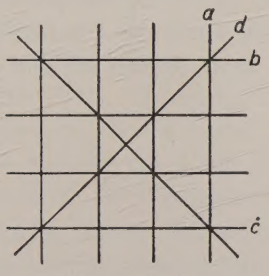

Fig. 3.

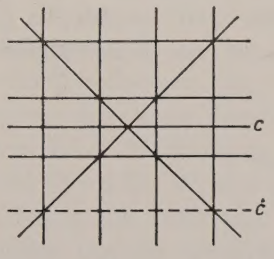

Fig. 4.

beiden Diagonalen ein (Fig. 3), so erkennt man leicht, daß diese Konstruktion für jedes z einen symmetrischen Komplex liefert. Denn die Charakteristik der Diagonalen ist $\chi_1 = (3_{[2z]})$, die der anderen Geraden $\chi_2 = (3, 3, 2\,z)$, und es gehören χ_1 und χ_2 derselben Klasse $c = 2\,z$ an. In jeder Klasse, deren Klassenkonstante gerade ist, existiert demnach ein solcher Komplex.

In unserem Fall sei nun $z = \frac{n-1}{2}$. Dann verschieben wir in diesem symmetrischen Komplex die Gerade $\dot{c}$ der Fig. 3 parallel zu sich selbst so, daß sie durch den Schnittpunkt der beiden Diagonalen geht (Fig. 4).

Außer den Geraden a, b, c hat dann keine Gerade ihre Charakteristik, die der Klasse $n-1$ angehört, geändert. Die Geraden a, b, c haben aber jetzt anstatt der Charakteristik $(3, 3, n-1)$ die Charakteristik $(3, n-1)$. Wir erhalten so einen nichtsymmetrischen Komplex B.

Nun greifen wir je drei von den $q = \frac{(\varrho+1)\,\varrho\,(\varrho-1)}{2}$ einfachen Punkten des Komplexes A, durch die noch keine Gerade gelegt worden war, heraus und legen durch jeden der drei Punkte eine Gerade a' bzw. b' bzw. c' so, daß weder a', noch b', noch c' mit einem schon vorhandenen Schnittpunkt auch der nicht zu A gehörigen, neu hinzugekommenen Geraden inzidiert. Dann wende man auf die Geraden des Komplexes B eine projektive Abbildung an, welche die Geraden a, b, c in die Geraden a' bzw. b' bzw. c' überführt. Bei einer projektiven Abbildung kann man ja bekanntlich stets die Bilder von vier Geraden vorschreiben. Die anderen Geraden $g_1, \ldots, g_r$ von B gehen dabei in entsprechende Geraden $g_1', \ldots, g_r'$ von B' über, und es läßt sich, wie man sich leicht überlegt, auch stets so einrichten, daß die Geraden $g_1', \ldots, g_r'$ mit keinem anderen nicht zu B' gehörigen Punkt inzident sind. Dann ist die Charakteristik der Geraden a', b' und c' wieder $(3, 3, n-1)$; ebenso gehören die Charakteristiken der Geraden $g_1', \ldots, g_r'$ der Klasse $c = n-1$ an, da sie sich nicht geändert haben.

Wiederholen wir nun das Verfahren mit je drei der q einfachen Punkte von A, so geht schließlich durch jeden Schnittpunkt von A genau eine neue Gerade, es gehören also auch die Charakteristiken der Geraden von A der Klasse $c = n-1$ an. Damit ist der Satz bewiesen.

Lebenslauf.

Am 27. November 1912 wurde ich, Eberhard Melchior, als Sohn des Studienrates Prof. Dr. Melchior in Dresden geboren. Nachdem ich daselbst vier Jahre meinen Elementarunterricht erhalten hatte, besuchte ich seit Ostern 1923 das humanistische Gymnasium zu Dresden-Neustadt, welches ich Ostern 1932 nach Ablegung der Reifeprüfung verließ, um mich dem Studium der exakten Naturwissenschaften, insbesondere der Mathematik zu widmen. Die beiden ersten Semester verbrachte ich in Göttingen. Ich setzte dann mein Studium an der Technischen Hochschule zu Dresden fort, wo ich unter anderem die Vorlesungen der Herren Professoren KOWALEWSKI, LAGALLY und BÖHMER hörte. Von meinem sechsten Studiensemester an besuchte ich endlich die Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin. Hier unternahm ich im Sommer 1935 zusammen mit Herrn W. JUNG zum erstenmal den Versuch, das Problem der symmetrischen Geradenkomplexe zu lösen, welcher jedoch nur zur Auffindung von Teilergebnissen führte, die Herr JUNG und ich in der „Deutschen Mathematik", Jahrgang 1 (1936) veröffentlichten. Die vorliegende Dissertation ist die unmittelbare Fortsetzung dieser Veröffentlichung.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. BIEBERBACH, ferner Herrn Prof. Dr. ERHARD SCHMIDT und Herrn Dr. WEBER für manche Anregung, nicht zuletzt auch für das große Interesse, das dieser Untersuchung entgegengebracht wurde, meinen herzlichsten Dank aussprechen.